Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

В.В. БУРАКОВСКИЙ, Т.В. БОРОДИЧ

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

для студентов исторического факультета,
факультета иностранный язык

Тексты лекций

Гомель 2011

УДК 512 (078)
ББК 22.14 Я73
Х 69

Рецензенты:

Рекомендованы к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Бураковский В.В.
Х 69 Основы высшая математика. /Бураковский В.В., Бородич Т.В. − Гомель: УО «ГГУ им. Ф.Скорины», 2011. − 34с.

Краткое изложение курса лекций по основам высшей математике студентам специальностей:

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Тексты лекций по учебному курсу ”Основы высшей математики”, предназначенный для обучения студентов факультета иностранных языков, исторического факультета. Тексты лекций написаны в соответствии с действующей программой по данному предмету.

Основное направление текстов лекций – теория вероятностей. В них рассмотрены следующие темы: классическое определение вероятности, основные формулы комбинаторики, геометрические вероятности, теоремы сложения и умножения вероятностей, формулы полной вероятности и Байеса, формула Бернулли, законы распределения и числовые характеристики случайных величин. Содержит основные теоретические сведения, примеры решения задач по теории вероятностей и контрольные задания. Предназначен для студентов математического, физического, экономического и заочного факультетов.

1 Элементы теории множеств. Множества и операции над ними

Понятие множества является одним из основных математических понятий. Это неопределяемое понятие, его можно только описать или пояснить на примерах. Так, можно говорить о множестве букв в латинском алфавите, множество всех книг в данной библиотеке, множестве студентов в данной группе, множестве всех точек данной линии. Чтобы задать множество, достаточно перечислить элементы или указать *характеристические* свойства элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы данного множества и только они.

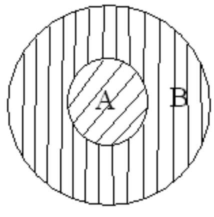
Определение 1.1. Предметы (объекты), составляющие некоторое множество, называются его *элементами*.

Множество принято обозначать прописными латинскими буквами, а элементы множества – строчными буквами. То, что x является элементом множества A, записывается так: $x \in A$ (x принадлежит A). Запись вида $x \notin A$ ($x\ \bar{\in} A$) означает, что x не принадлежит A, т.е. не является элементом множества A.

Элементы множества принято записывать в фигурных скобках. Например, если A – множество, состоящее из первых трех букв латинского алфавита, то его записывают так: $A=\{a,b,c\}$.

Множество может содержать бесконечно много элементов (множество точек прямой, множество натуральных чисел), конечное число элементов (множество школьников в классе), либо вообще не содержать ни одного элемента (множество студентов пустой аудитории).

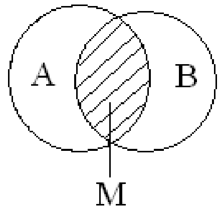
Определение 1.2. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством*, обозначается Ø.



Определение 1.3. Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A принадлежит и множеству B. Это обозначается $A \subset B$ (A – подмножество B).

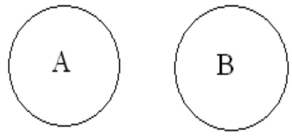
Пустое множество считают подмножеством любого множества. Если множество A не является подмножеством множества B, то пишут $A \not\subset B$.

Определение 1.4. Два множества A и B называют *равными*, если являются подмножествами друг друга. Обозначают $A = B$. Это означает, что если $x \in A$, то $x \in B$ и наоборот, т.е. если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$.



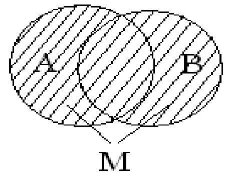
Определение 1.5. *Пересечение* множеств A и B называют множество M, элементы которого являются одновременно элементами обоих множеств A и B. Обозначают $M= A \cap B$. Т.е. $x \in A \cap B$, то $x \in A$ и $x \in B$.

Записывают $A \cap B=\{\ x \mid x \in A$ и $x \in B\ \}$. (Вместо союза **и –** ставятся знаки $\wedge$, &).



Определение 1.6. Если $A \cap B = \varnothing$, то говорят, что множества A и B *не пересекаются.*

Аналогично можно определить пересечение 3-х, 4-х и любого конечного числа множеств.



Определение 1.7. *Объединением* множеств A и B называют множество M, элементы которого принадлежат хотя бы одному из данных множеств. Обозначают $M=A\cup B$. Т.о. $A \cup B=\{ x \mid x \in A$ или $x \in B \}$. (Вместо союза **или** – ставится знак $\vee$).

Аналогично определяется и множество $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Оно состоит из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A_1, $A_2, \ldots, A_n$ (а может быть, и нескольким сразу).

Пример 1.8. 1) если $A=\{1;2;3;4;5\}$ и $B=\{1;3;5;7;9\}$, то $A\cap B=\{1;3;5\}$ и $A\cup B=\{1;2;3;4;5;7;9\}$.

2) если $A=\{2;4\}$ и $B=\{3;7\}$, то $A\cap B=\varnothing$ и $A\cup B=\{2;3;4;7\}$.

3) если $A=\{$летние месяцы$\}$ и $B=\{$месяцы, в которых 30 дней$\}$, то $A\cap B=\{$июнь$\}$ и $A\cup B=\{$апрель; июнь; июль; август; сентябрь; ноябрь$\}$.

Определение 1.9. *Натуральными* называются числа 1,2,3,4,…, используемые для счета предметов.

Множество натуральных чисел обозначается **N**, $\mathbf{N}=\{1;2;3;4;\ldots;n;\ldots\}$. Оно является бесконечным, имеет наименьший элемент 1 и не имеет наибольшего элемента.

Пример 1.10. A – множество натуральных делителей числа 40. Перечислить элементы этого множества. Верно ли, что $5 \in A$, $10 \in A$, $-8 \in A$, $4 \notin A$, $0 \in A$, $0 \notin A$.

◁ $A = \{1,2,4,5,8,10,20,40\}$. (В,В,Н,Н,Н,В)▷

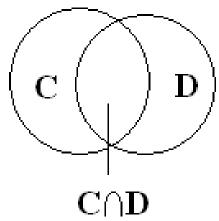
Пример 1.11. Перечислите элементы множеств, заданных характеристическими свойствами:

а) $A=\{x \mid (x-1)(2x-1)(3+x)=0\}$, получаем $A = \{1;\frac{1}{2};-3\}$

б) $B=\{x \mid -1{,}1< x < 5 \wedge x \in \mathbf{N}\}$, имеем $B = \{1;2;3;4\}$.

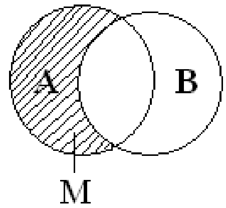
Пример 1.12. Дано множество чисел $K = \{21;54;153;171;234\}$. Составить подмножество чисел из K, которые а) делятся на 7; б) делятся на 9; в) не делятся на 5; г) делятся на 4.

◁ а) $A = \{21\}$, б) $B = \{54;153;171;234\}$, в) $C = K$, г) $D=\varnothing$ ▷



Пример 1.13. Множество C состоит из 11 элементов, множество D – из 8. Сколько элементов содержит $C\cap D$, если $C\cup D$ содержит 15 элементов?

◁ Поскольку $A+B-A\cup B=A\cap B$, тогда 11+8–15=4 ▷



Определение 1.14. Разность множеств A и B называется множество M, элементы которого принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B.

Обозначают $M=A \setminus B$.

Таким образом, $A \setminus B=\{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$.

Пример 1.15. Если $A = \{1;2;3;4;5\}$ и $B = \{1;5\}$, то $A \setminus B=\{2;3;4\}$.

2 Функции и способы их задания.

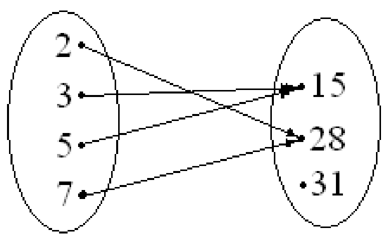
Пусть X и Y некоторые множества.

Определение 2.1. *Функцией* называется отношение (соответствие) f между множествами X и Y, при котором каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент $y \in Y$. Множество X называют областью определения функции и обозначают D(f), а множество $\{f(x)\} \subset Y$ – областью или множеством значения функции и обозначают E(f).

Определение 2.2. Переменную $x \in$D(f) называют независимой переменной или аргументом, а $y \in$E(f) называют зависимой переменной или функцией.

Определение 2.3. Если X и Y – числовые множества, то $y=f(x)$ называется числовой функцией.

Пример 2.4. Пусть даны два множества $X=\{2;3;5;7\}$, $Y=\{15;18;31\}$. Установим между ними такое соответствие: элемент $x \in X$ является делителем элемента $y \in Y$. Тогда каждому элементу множества X соответствует только один элемент множества Y: $2 \to 28$; $3 \to 15$; $5 \to 15$; $7 \to 28$. Следовательно, задана функция.



Существуют три способа задания функции: *аналитический, графический* и *табличный.*

Если указана совокупность операций, которые нужно произвести над *аргументом x*, чтобы получить значение функции, то говорят, что функция задана *аналитическим выражением*.

Примером могут служить функции $y=x^2-5x+1$, $x \in [0,1]$, $y=x^2+7x-1$, $x \in (-\infty;+\infty)$. Они заданы на различных множествах.

Функция может задаваться на различных числовых множествах различными аналитическими выражениями, например

$$f(x)=\begin{cases} 2x+3, & -1 \le x \le 0, \\ x+2, & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Эта функция определена [-1;1]. Для вычисления значения функции нужно выяснить, каким аналитическим выражением следует воспользоваться для заданного конкретного значения аргумента.

Определение 2.5. Множество из n элементов $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, для каждого из которых установлено, какой является 1-м, 2-м, …, n-м, называется упорядоченной n-кой $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Определение 2.6. Множество упорядоченных пар действительных чисел, т.е. $\{(x;y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, называется *числовой плоскостью*. Обозначают ее $\mathbf{R}^2$.

Способ задания функции с помощью графика на координатной плоскости называется *графическим*.

При *табличном* способе задания функции приводится таблица, в которой даются значения функции для конечного множества значений аргумента.

3 Предмет и задачи теории вероятностей. События и операции над ними. Относительные частоты и их свойства

Возникновение теории вероятностей относят к XVII веку и связывают с решением комбинаторных задач теории азартных игр и потребностями страхового дела. Азартные игры (карты, кости) дали стимул для построения математических моделей игровых ситуаций. Эти модели предоставляли игроку возможность ориентироваться в ходе игры, делать расчеты ставок, оценивать шансы выигрыша, а также позволяли планировать расходы и доходы страховых компаний и т.д.

Разработкой таких моделей занимались в 17 веке Б. Паскаль, П. Ферма, Х. Гюйгенс. Основы классической теории вероятности были сформулированы в 18 веке Я. Бернулли, П. Лапласом, С. Пуассоном, К. Гауссом. В 1933году А.Н. Колмогоров сформулировал аксиомы теории вероятности, базирующиеся на теории множеств.

Однако с теорией вероятностей развивалась и другая современная дисциплина – математическая статистика, которая широко применяется в экономике, технике, социологии, медицине, физике, лингвистическом программировании и др.

Определение 3.1. *Предметом теории вероятностей* является количественный и качественный анализ математических моделей вероятностных экспериментов, называемый статистической обработкой экспериментальных данных.

Вероятностные эксперименты имеют следующие общие черты: непредвиденность результата; наличие определенных количественных закономерностей при их многократном повторении при одинаковых условиях; множество возможных исходов.

Определение 3.2. *Вероятностными* называют эксперименты, которые можно повторить произвольное число раз при соблюдении одних и тех же стабильных условий, однако их исходы неоднозначны, случайны.

Определение 3.3. *Теория вероятностей* – наука, занимающаяся анализом математических моделей для принятия решений в условиях неопределенности.

Первичным понятием теории вероятности, не определенным через другие понятия, является *пространство элементарных исходов* Ω.

Обычно в качестве пространства элементарных исходов берутся единственно возможные неразложимые результаты эксперимента.

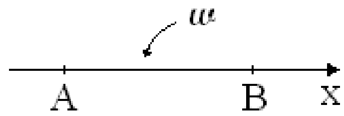
Пример 3.4. Приведем примеры пространств элементарных исходов:

1) При бросании симметричной монеты в качестве Ω выбирается Ω={г,р}.

2) При бросании игральной кости пространство элементарных исходов следующее Ω={1,2,3,4,5,6}.

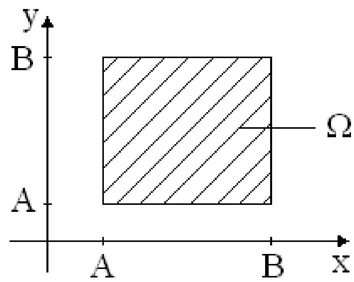
3) При бросании двух симметричных монет Ω={(р,р),(р,г),(г,р),(г,г)}.

4) При бросании двух игральных костей $\Omega=\{(i,j) \mid i,j \in \{1,\ldots,6\}\}$, n=36.



5) Пусть на [AB] наудачу бросается точка

$\Omega=\{\omega \mid \omega\in[AB]\}=[AB]$.



6) Пусть на [AB] наудачу бросаются две точки $\Omega=\{(x,y) \mid x\in[AB],\, y\in[AB]\}=[AB]\times[AB]$.

Определение 3.5. *Опытом* или *испытанием* называют всякое осуществление определённого комплекса условий или действий, при которых происходит соответствующее явление. Возможный результат опыта называют *событием*, те *событием* называется произвольное подмножество *A* пространства элементарных исходов Ω.

Пример 3.6. Опытом является подбрасывание монеты, а событиями "герб", "цифра на верхней ее стороне" (когда монета упадет). Опытами являются стрельба по мишени, извлечение шара из ящика и т.п. События будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита *A, B, C*.

Определение 3.7. Каждое событие, которое может наступить в итоге опыта, называется *элементарным исходом* (*элементарным событием*, или *шансом*).

Определение 3.8. Элементарные исходы, при которых данное событие наступает, называются *благоприятствующими* этому событию, или *благоприятными шансами*, т.е. те элементарные исходы, из которых состоит событие *A*, называются *благоприятствующими* событию *A*.

Пример 3.9. Так, при подбрасывании игрального кубика элементарные исходы A_1, A_3, A_5 являются благоприятствующими событию "выпало нечетно число очков".

Говорят, что событие *A* произошло, если в результате эксперимента происходит элементарный исход благоприятствующий событию *A*, т.е. $\omega\in A$.

Определение 3.10. Событие называется *достоверным*, в данном опыте, если оно обязательно произойдет в этом опыте, т.е. все пространство элементарных исходов Ω, если его взять в качестве события, называют *достоверным* событием, поскольку оно происходит в любом эксперименте (всегда).

Пример 3.11. Если в ящике только голубые шары, то событие "из ящика извлечен голубой шар" является достоверным (в ящике нет шаров другого цвета).

Определение 3.12. Событие называется *невозможным*, в данном опыте, если оно не может произойти в этом опыте.

Пустое множество Ø (т.е. множество, не содержащее ни одного элементарного исхода) называется *невозможным* событием, поскольку оно никогда не произойдет.

Пример 3.13. Так, если в ящике находятся только красные шары, то событие "из ящика извечен голубой шар" является невозможным (таких шаров в ящике нет).

Определение 3.14. Событие называется *случайным* в данном опыте, если око может произойти, а может и не произойти в этом опыте, т.е. все остальные события, кроме достоверного и невозможного, называются *случайными*.

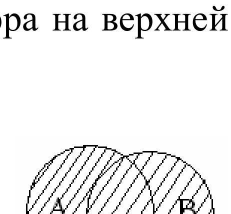
Пример 3.15. Если в ящике находятся n голубых и m красных шаров, одинаковы по размеру и весу, то событие "из урны извлечен голубой шар" является случайным (оно может произойти, а может и не произойти, поскольку в урне имеются не только голубые, но и красные шары). Случайными событиями являются "герб" и "цифра на верхней стороне монеты при ее подбрасывании", "попадание и промах при стрельбе по мишени", "выигрыш по билету лотереи" и т.п.

Замечание 3.16. Приведенные примеры свидетельствуют о том, что одно и то же событие в некотором опыте может быть достоверным, в другом – невозможным, в третьем - случайным. Говоря о достоверности, невозможности, случайности события, имеют в виду его достоверность, невозможность, случайность по отношению к конкретному опыту, т.е. к наличию определенного комплекса условий или действий.

Определение 3.17. Два события называются *совместными* в данном опыте, если появление одного из них не исключает появление другого в этом опыте.

Пример 3.18. Так, при подбрасывании двух симметричных монет, событие A – «герб на верхней стороне первой монеты" и B – "цифра на верхней стороне второй монеты" являются совместными.

<u>Операции над событиями.</u>



$A \cup B$

Определение 3.19. *Суммой* событий A и B называют объединение этих множеств $A \cup B$.

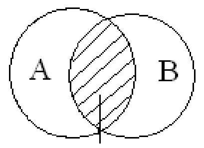
Обозначают $A + B = \{ x \mid x \in A$ или $x \in B \}$.

Вместо союза **или –** ставится знак $\vee$.

Определение 3.20. *Произведением* событий A и B называют пересечение множеств $A \cap B$.

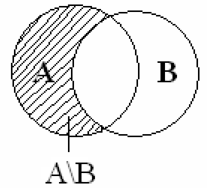
Обозначают $AB=\{ x \mid x \in A$ и $x \in B \}$.

Вместо союза **и –** ставятся знаки $\wedge$, &.



Определение 3.21. *Разностью* событий A и B называют разность множеств $A \setminus B$.

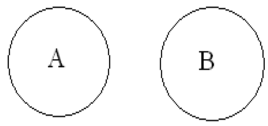
Обозначают $A \setminus B=\{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$.



Определение 3.22. Два события называются *несовместными*, если они не могут произойти вместе при одном и том же испытании, т.е. события A и B называются *несовместимыми (несовместными),* если AB = Ø.

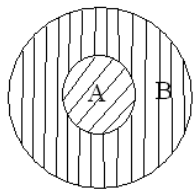
Если AB = Ø, то будем говорить, что $A \cup B= A + B$.

Так, несовместными являются попадание и промах при одном выстреле.

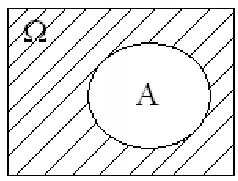


Несколько событий называются несовместными, если они попарно несовместны.

Определение 3.23. Говорят, что событие A *влечет* событие B, если $A \subset B$.



Определение 3.24. Два события называются *противоположными*, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. Если одно из противоположных событий обозначено буквой A, то другое обозначают $\bar{A}$. Таким образом событие $\bar{A} = \Omega \setminus A$ называется *противоположным* к событию A.



Пример 3.25. 1) Так, противоположными являются события “герб” и “цифра” при одном подбрасывании симметричной монеты.

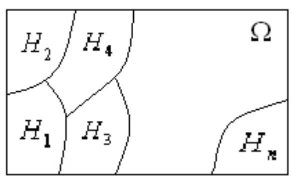
2) Если A – “попадание”, то $\bar{A}$ – “промах” при одном выстреле по мишени.

3) При бросании игральной кости Ω={1,2,3,4,5,6}. Если A – выпадение нечетного числа очков, т.е. A={1,3,5,}, то $\bar{A}$ ={2,4,6} – противоположное событие (выпадение четного числа очков).

Определение 3.26. Множество событий $H_1, H_2,\dots, H_n$ называют *полной группой событий*, если они попарно-несовместны; появление одного и только одного из них является достоверным событием.

Таким образом события $H_1, H_2,\dots, H_n$ образуют *полную группу*, если $H_1+ H_2+\dots+ H_n= \Omega$ (т.е. $H_i H_j=\varnothing$, если $i\neq j$).

В частности события A и $\bar{A}$ образуют полную группу, т.к. $A +\bar{A}= \Omega$.



Пример 3.27. Рассмотрим события, появляющиеся при подбрасывании игрального кубика (т.е. кубика, на гранях которого записаны цифры 1,2,3,4,5,6 или изображены знаки, соответствующие этим цифрам). Когда кубик упадет, то верхней гранью окажется грань с одной из этих цифр. Событие: “верхней гранью оказалась грань с цифрой k” обозначим через A_k

(k=1,2,3,4,5,6). События A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 образуют полную группу: они попарно-несовместны; появление одного и только одного из них является достоверным событием (когда кубик упадет, то только одна из граней окажется верхней, на ней написана только одна цифра от 1 до 6).

Определение 3.28. События считают *равновозможными*, если нет оснований полагать, что одно событие является более возможным, чем другие.

Пример 3.29. При подбрасывании монеты событие A (появление цифры) и событие B (появление герба) равновозможны, так как предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму и наличие чеканки не влияет на то, какая сторона монеты (герб или цифра) окажется верхней. При подбрасывании игрального кубика события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 являются равновозможными, поскольку предполагается, что кубик изготовлен из однородного материала, имеет правильную форму и наличие цифр (или очков) на гранях не влияет на то, какая из шести граней окажется верхней.

Относительные частоты и их свойства.

Пусть производится некоторый случайный (вероятностный) эксперимент, пространством элементарных исходов является множество Ω. Рассмотрим некоторое событие A ($A \subseteq \Omega$). Если эксперимент произвести N раз, а событие A появится в них N(A) раз, то число $W(A)=\frac{N(A)}{N}$ называется *относительной частотой появления события A*.

Свойство 3.30. Относительная частота произвольного события неотрицательна, т.е. $\forall\ A \subseteq \Omega$, $W(A) \geq 0$.

Свойство 3.31. Относительная частота достоверного события равна 1.

$$W(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{N}{N}=1.$$

Свойство 3.32. (аддитивности). Относительная частота суммы несовместных событий равна сумме относительных частот этих событий.

$$W(A+B)=\frac{N(A+B)}{N}=\frac{N(A)+N(B)}{N}=\frac{N(A)}{N}+\frac{N(B)}{N}=W(A)+W(B).$$

4 Аксиомы теории вероятностей. Дискретные пространства элементарных исходов. Классическое определение вероятности

Пусть Ω пространство элементарных исходов, F – множество всех подмножеств Ω. Любому событию $A \in$ F ставится в соответствие действительное число P(A), называемое *вероятностью события A*, при этом выполняются аксиомы теории вероятности:

Аксиома 4.1. Вероятность произвольного события неотрицательна, т.е. $\forall\ A \in$ F, P(A)$\geq$0.

Аксиома 4.2. Вероятность достоверного события равна 1, т.е. P(Ω)=1.

Аксиома 4.3. (*счетной аддитивности*) Если $A_1, A_2, \ldots \in$ F и $A_i \cdot A_j = \varnothing$ (i$\neq$j), то P(A_1+ A_2+...) = P(A_1)+P(A_2)+... или $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Определение 4.4. Бесконечное множество называется *счетным*, если элементы этого множества можно занумеровать натуральными числами.

Все другие множества называются *несчетными* (например, множество точек [a,b] ненулевой длины).

Определение 4.5. Пространство элементарных исходов называется *дискретным*, если оно конечное или счетное, т.е. $\Omega=\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ или $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$.

Любому элементарному исходу ω_i ставится в соответствие число $p(\omega_i)$, так что при этом $\sum_{\{\omega_i \mid \omega_i \in \Omega\}} p(\omega_i) = 1$.

Определение 4.6. *Вероятностью события A* называется число $P(A) = \sum_{\{\omega_i \mid \omega_i \in A\}} p(\omega_i)$.

Пример 4.7. Бросается игральная кость. Найти вероятность выпадения нечетного числа очков.

◅ $p(\omega_i)=\frac{1}{6}$, i =1,..,6, $P(A)= p(\omega_1, \omega_3, \omega_5)= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. ▻

Сформулируем следующие предположения:

1. Пространство элементарных исходов конечно: $\Omega=\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.
2. Все элементарные исходы равновероятны (равновозможны), т.е. $p(\omega_1)= p(\omega_2)=\ldots= p(\omega_n)$.

Поскольку $\sum_{i=1}^{n} p(\omega_i)=1$, то $p(\omega_i)=\frac{1}{n}$, i =1,..,n.

Рассмотрим некоторое событие $A \subseteq \Omega$, состоящее из k элементарных исходов, $k \leq n$, $A=\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$.

Вероятность события $P(A)=\sum_{l=1}^{k} p(\omega_{i_l}) = \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$.

Определение 4.8. (классическое определение вероятности) Если пространство элементарных исходов конечно, а все элементарные исходы равновероятны, то *вероятность события A* называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих A, к общему числу всех возможных элементарных исходов $P(A)=\frac{k}{n}$.

Пример 4.9. Бросается две монеты. Найти вероятность того, что хотя бы на одной выпадет герб.

◅ Ω={(г,г), (г,р), (р,г), (р,р)}, n=4.

A={(г,г), (г,р), (р,г)}, k=3.

Таким образом, $P(A)=\frac{k}{n}=\frac{3}{4}$. ▷

Пример 4.10. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7?

◁ $\Omega=\{(i,j) \mid i,j \in \{1,..,6\}\}$, n=36,

A={ (6,1), (5,2), (4,3), (3,5), (2,5), (1,6)}, k=6,

Таким образом, $P(A)=\frac{k}{n}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$. ▷

5 Основные правила комбинаторики. Выборки, сочетания. Аксиомы теории вероятностей

Лемма 5.1. Из m элементов $a_1,\ldots,a_n$ первой группы и n элементов $b_1,\ldots,b_n$ второй группы можно составить ровно $m\cdot n$ упорядоченных пар вида (a_i, b_j), содержащих по одному элементу из каждой группы.

◁ $(a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_n)$, Всего $m\cdot n$ пар ▷

$(a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_n)$, m строк

… … … … … … ...

$(a_m, b_1), (a_m, b_2), \ldots, (a_m, b_n)$.

n столбцов

Пример 5.2. В колоде карт 4 масти (черва, пика, трефа, бубна), в каждой масти по 9 карт или по 13 карт, тогда в колоде либо n=4·9 =36 карт, либо n=4·13=52 карты.

Лемма 5.3. Из n_1 элементов первой группы $a_1, a_2,\ldots, a_{n_1}$,

n_2 элементов второй группы $b_1, b_2,\ldots, b_{n_2}$,

и т.д. … … … … … … … …

n_k элементов k-той группы $x_1, x_2,\ldots, x_{n_k}$.

можно составить ровно $n_1 \cdot n_2 \cdot\ldots\cdot n_k$ различных упорядоченных комбинаций вида $(a_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, x_{j_k})$, содержащих по одному элементу из каждой группы.

Пример 5.4. При бросании двух игральных костей число различных упорядоченных комбинаций следующее: N = 6^2 = 36; при бросании трех костей – N=6^3=216.

Леммы 5.1 и 5.3 называются *основными правилами комбинаторики.*

Пусть имеется множество из n элементов $\{ a_1, a_2,\ldots, a_n\}$. Будем рассматривать выборки объёма k вида ($a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k}$) из n элементов. Все выборки можно классифицировать по двум признакам:

1) упорядоченные и неупорядоченные;

2) с возвращением и без возвращения.

Если выборки считаются упорядоченными, то играет роль порядок элементов в выборке. Если же выборка неупорядоченная, то все выборки с одним и тем же составом элементов отождествляются.

Пример 5.5. Рассмотрим множество, состоящее из трёх элементов $\{1,2,3\}$. Составим таблицу числа выборок объёма k=2 из трёх элементов.

(1,1), (1,2), (1,3) (2,1), (2,2), (2,3) (3,1), (3,2), (3,3)	(1,1), (1,2), (1,3) (2,2), (2,3) (3,3)	с возвращением
(1,2), (1,3) (2,1), (2,3) (3,1), (3,2)	(1,2), (1,3) (2,3)	без возвращения
упорядоченные	неупорядоченные	выборки

Общая таблица числа выборок объёма k из n элементов:

n^k	C_{n+k-1}^k	с возвращением
A_n^k	C_n^k	без возвращения
упорядоченные	неупорядоченные	выборки

Определение 5.6. Упорядоченная выборка без возвращения называется *размещением.*

Число размещений $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Пример 5.7. В лифт 12-этажного дома зашли 3 человека. Найти вероятность того, что все вышли на разных этажах.

◅ $\Omega=\{(i_1, i_2, i_3) \mid i_1, i_2, i_3 \in \{2,3,\ldots,12\}\}$,$\{ i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3\}$ – дополнительное условие для события A. Первое (Ω – упорядоченные выборки с возвращением, n=11^3. Число благоприятствующих исходов k= $A_{11}^3=\dfrac{11!}{8!}$=9·10·11. По классическому определению вероятности Р(А)=$\dfrac{k}{n}=\dfrac{9\cdot10\cdot11}{11^3}=\dfrac{90}{11^2}=\dfrac{90}{121}$. ▻

Определение 5.8. *Перестановкой* из k элементов называется совокупность этих же элементов, записанных в произвольном порядке. Число перестановок из k элементов P_k=$k!$ (0!=1).

Определение 5.9. Произвольное k-элементное подмножество множества, состоящего из n элементов, называется *сочетанием* из n элементов по k элементов.

Обозначается число сочетаний из n элементов по k элементов через $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $k \in \{0,1,\ldots,n\}$.

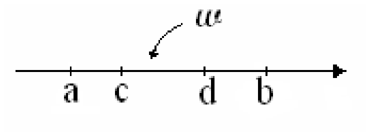
<u>Свойства сочетаний:</u>

1) $C_n^0 = C_n^n = 1$;
2) $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;
3) $C_n^k = C_n^{n-k}$;
4) $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.

6 Геометрические вероятности

<u>I. Геометрическая вероятность на прямой.</u>

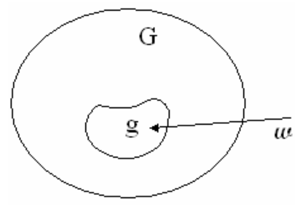
Пусть на числовой оси имеется отрезок [a,b] и на него наудачу бросается точка. Вероятность того, что эта точка попадёт на $[c,d] \subset [a,b]$, вычисляется по формуле:



$P\{\omega \in [c,d]\} = \dfrac{d-c}{b-a}$ – *геометрическая вероятность на прямой.*

<u>II. Геометрическая вероятность на плоскости.</u>

Пусть на плоскости фигура g составляет часть фигуры G. Вероятность того, что наудачу брошенная в фигуру G точка попадёт в фигуру $g \subset G$ находится по формуле:



$P\{\omega \in g\} = \dfrac{S_g}{S_G}$ – *геометрическая вероятность на плоскости.*

Здесь S_g и S_G – площади фигур g и G соответственно.

<u>III. Геометрическая вероятность в пространстве.</u>

Пусть в пространстве ($\mathbf{R}^3$) имеется фигура d, составляющая часть фигуры D. Вероятность того, что наудачу брошенная в фигуру D точка попадёт в фигуру d, определяется по формуле:

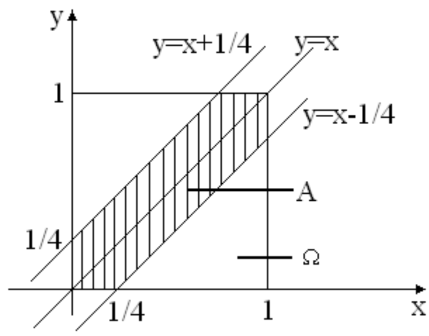
$P\{\omega \in d\} = \dfrac{V_d}{V_D}$ - *геометрическая вероятность в пространстве.*

Здесь V_d и V_D – объёмы фигур d и D соответственно.

Замечание 6.1. Геометрические вероятности позволяют устранить недостаток классического определения вероятности, состоящий в том, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом элементарных исходов.

Пример 6.2. (*задача о встрече*) Два студента условились встретиться в определённом месте между 12 и 1 ч дня. Пришедший первым ждёт второго ¼ часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если между 12 и 1 ч дня каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода.

⊲ Пусть x – момент прихода первого студента (необязательно, чтобы он пришёл первым), а y – момент прихода второго. Тогда $\Omega=\{(x,y)|\ x,y\in[0,1]\}$, $A==\{(x,y)|\ |x\text{-}y|\le\frac{1}{4}\}$.



1) $x\ge y,\ x-y=\frac{1}{4},\ \ y=x-\frac{1}{4}$;

2) $x<y,\ y-x=\frac{1}{4},\ \ y=x+\frac{1}{4}$;

P(A)= $\frac{S_g}{S_G}=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$. ⊳

7 Свойства вероятности

Свойство 7.1. Вероятность невозможного события равна 0: P(Ø)=0.

Свойство 7.2. Вероятность достоверного события равна 1: P(Ω)=1.

Свойство 7.3. Для любого события A верно, что $0\le P(A)\le 1$.

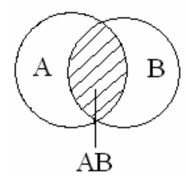
⊲ P(A)=$\frac{n_A}{n}$. Т.к. $0\le n_A\le n$, то $0\le\frac{n_A}{n}\le 1$, следовательно $0\le P(A)\le 1$. ⊳

Свойство 7.4. (*теорема сложения вероятностей*) Если события A и B несовместимы, то вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: P(A+B)=P(A)+P(B).

⊲ $P(A+B)=\frac{n_{A+B}}{n}=\frac{n_A+n_B}{n}=\frac{n_A}{n}+\frac{n_B}{n}=P(A)+P(B)$. ⊳

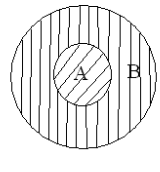
Свойство 7.5. (*обобщённая теорема сложения вероятностей*)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$



⊲ $P(A\cup B)=\frac{n_{A\cup B}}{n}=\frac{n_A+n_B-n_{AB}}{n}=\frac{n_A}{n}+\frac{n_B}{n}-\frac{n_{AB}}{n}=$
$=P(A)+P(B)-P(AB)$. ⊳

Свойство 7.6. (теорема сложения k слагаемых) Если события $A_1,A_2,\ldots,A_k$ попарно несовместимы, то $P(\sum_{i=1}^{k}A_i)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i)$.



Свойство 7.7. Если событие A влечёт B ($A \subset B$), то $P(A) \le P(B)$.

◁ $B = A + (B \backslash A)$, $P(B) = P(A) + P(B \backslash A) \ge P(A)$. ▷

Свойство 7.8. Если событие A влечёт B ($A \subset B$), $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$

◁ из предыдущего свойства ▷

Свойство 7.9. Вероятность события, противоположного событию A вычисляется по формуле: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. $A + \bar{A} = \Omega$.

◁ $\bar{A} = \Omega \backslash A$, $P(\bar{A}) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$, т.к. $A \subset \Omega$. ▷

Свойство 7.10. Если события $H_1, H_2, \ldots, H_k$ образуют полную группу, то

$$P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_k) = 1.$$

◁ по определению полной группы $H_1 + H_2 + \ldots + H_k = \Omega$, тогда по свойству 6 $P(\sum_{i=1}^{k} H_i) = (\sum_{i=1}^{k} P(H_i)) = P(\Omega) = 1$. ▷

8 Условная вероятность. Независимость

Определение 8.1. *Условной вероятностью* события B при условии A называется вероятность события В в предположении, что событие А наступило. Обозначение: $P(B|A) = P_A(B)$. Находится по формуле: $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$ (1).

Теорема 8.2. (*умножение вероятностей*)

$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$.

◁ следует из формулы (1) ▷

Теорема 8.3. (*обобщённая теорема умножения вероятностей*)

$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\, P(A_2 | A_1)\, P(A_3 | A_1 A_2) \ldots P(A_n | A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$.

◁ $P(A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n) = P(A_1 A_2 \ldots A_{n-1})\, P(A_n | A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) =$

$= P(A_1 A_2 \ldots A_{n-2}) P(A_{n-1} | A_1 A_2 \ldots A_{n-2}) P(A_n | A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) = \ldots =$

$= P(A_1)\, P(A_2 | A_1)\, P(A_3 | A_1 A_2) \ldots P(A_n | A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$. ▷

Пример 8.4. Студент знает 20 вопросов из 25. Преподаватель задаёт 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент знает все 3 вопроса.

◁ Обозначим через A – студент знает все 3 вопроса, A_1 – знает первый вопрос, A_2 – знает второй вопрос, A_3 – знает третий вопрос.

$A = A_1 A_2 A_3$, $P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2 | A_1)\, P(A_3 | A_1 A_2) = \dfrac{20}{25} \cdot \dfrac{19}{24} \cdot \dfrac{18}{23} < \dfrac{1}{2}$ ▷

Определение 8.5. События A и B называются *независимыми*, если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Свойство 8.6. События A и B независимы тогда и только тогда, когда $P(B|A) = P(B)$.

◅ Пусть события A и B независимы, т.е. $\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)$, тогда $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(A)P(B)}{P(A)}=\mathrm{P}(B)$.

Если $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$, то $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\mathrm{P}(B)$, откуда $\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)$. ▻

Определение 8.7. (*независимости в совокупности*) События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *независимыми* (*или независимыми в совокупности*), если:
1) $\mathrm{P}(A_i A_j)=\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(A_j)$, $i\neq j$, $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ – попарно независимы,
2) $\mathrm{P}(A_i A_j A_k)=\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(A_j)\,\mathrm{P}(A_k)$, $i\neq j$, $j\neq k$, $i,j,k\in\{1,2,\ldots,n\}$ – независимы по три,
и т.д. ……
n-1) $\mathrm{P}(A_1 A_2 \ldots A_n)=\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)\ldots\mathrm{P}(A_n)$.

Замечание 8.8. Из попарной независимости не вытекает независимость в совокупности.

9 Формулы полной вероятности и Байеса

Теорема 9.1. (*формула полной вероятности*) Если события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу, то вероятность появления события A, которое может произойти совместно с любым из событий H_i, $i\in\{1,\ldots,n\}$, находится по формуле:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1)+\ldots+\mathrm{P}(H_n)\mathrm{P}(A|H_n) \text{ или } \mathrm{P}(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A\,|\,H_i).$$

◅ Поскольку события образуют полную группу, то $\Omega=H_1+H_2+\ldots+H_n$. Событие A происходит только с одним из событий H_i, $i\in\{1,\ldots,n\}$, поэтому $A\cdot\Omega=A=A\cdot H_1+A\cdot H_2+\ldots+A\cdot H_n$. По теореме сложения вероятностей $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(A\cdot H_1)+\ldots+\mathrm{P}(A\cdot H_n)=\mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1)+\ldots+\mathrm{P}(H_n)\mathrm{P}(A|H_1)$. ▻

Пример 9.2. Имеются две урны. В первой – 3 белых и 5 чёрных шаров, во второй – 4 белых и 3 чёрных. Из 1-й урны наудачу взят 1 шар и переложен во 2-ю урну. После этого из 2-й урны извлечён наудачу шар. Какова вероятность того, что он белый?

◅ A – из 2-й урны извлечён белый шар,
H_1 – из 1-й урны во 2-ю переложен белый шар,
H_2 – из 1-й урны во 2-ю переложен чёрный шар, $H_1+H_2=\Omega$.
$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1)+\mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(A|\,H_2)=\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{5}{8}+\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{4}{8}=\dfrac{35}{64}$. ▻

Замечание 9.3. При применении формулы полной вероятности события $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующие полную группу, называются *гипотезами***.**

Теорема 9.4. (*формула Байеса*) Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу, A – некоторое событие, которое может произойти совместно с любым из событий H_i, $i\in\{1,\ldots,n\}$, тогда условная вероятность:

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}, \ j\in\{1,2,\ldots,n\}.$$

◅ $P(H_j|A) = \frac{P(H_jA)}{P(A)} = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}$. ▻

Пример 9.5. Рассмотрим предыдущий пример с учётом того, что из 2-й урны вынули белый шар. Найти вероятность того, что из 1-й урны во 2-ю переложили белый шар.

◅ $P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)} = \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}}{\frac{35}{64}} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$. ▻

Замечание 9.6. В формуле Байеса вероятности $P(H_i)$, $i\in\{1,\ldots,n\}$ называются *априорными вероятностями гипотез.* Вероятности $P(H_i|A)$, $i\in\{1,\ldots,n\}$ называются *апостериорными вероятностями гипотез.*

10 Схема независимых испытаний Бернулли. Полиномиальное распределение

Предположим, что производятся независимо друг от друга n испытаний, в каждом из которых возможны только 2 исхода: успех и неудача («У»,»Н»). Причём вероятность успеха Р(У)=p, Р(Н)=q , $p+q=1$.

Определение 10.1. Последовательность n испытаний называется *испытаниями Бернулли*, если эти испытания независимы, в каждом из них возможны 2 исхода, причём вероятности этих исходов не меняются от испытания к испытанию.

В n испытаниях Бернулли элементарным исходом является:
$(\omega_1, \omega_2,\ldots, \omega_n)$, где $\omega_i\in$ {У,Н}, $i\in\{1,\ldots,n\}$.

Всего таких исходов 2^n. Поскольку испытания независимы, то:
$P(\omega_1, \omega_2,\ldots, \omega_n)= P(\omega_1)P(\omega_2)\ldots P(\omega_n)$.

Обозначим через $P_n(k)$ вероятность того, что в n испытаниях Бернулли произошло ровно k успехов. Тогда

$P_n(k)$=P{(У,…,У,Н,…,Н),(У,…,У,Н,У,Н,…,Н),…,(Н,…,Н,У,…У)}=
$= p^kq^{n-k} + p^kq^{n-k} + \ldots + p^kq^{n-k} = C_n^k p^kq^{n-k}$.

Таким образом получим
$P_n(k)= C_n^k p^kq^{n-k}$, $k\in\{0,\ldots,n\}$, $p+q=1$ – *формула Бернулли*.

Пример 10.2. Двое равных по силам шахматистов играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть одну партию из двух или две из четырёх? Ничьи во внимание не принимаются.

◅ p=q=$\frac{1}{2}$, $P_2(1)=C_2^1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$;

$$P_4(2)=C_4^2\cdot(\frac{1}{2})^2\cdot(\frac{1}{2})^2=6\cdot\frac{1}{16}=\frac{3}{8};$$

Таким образом $P_2(1)> P_4(2)$. ▻

<u>Полиноминальное распределение</u>

Предположим, что производится независимо друг от друга n испытаний, в каждом из которых возможны k исходов $E_1, E_2,\ldots, E_k$. Вероятность этих исходов обозначим $P(E_i)=p_i$, $i\in\{1,\ldots,k\}$. Причём $\sum_{i=1}^{k} p_i=1$, $k>2$.Вероятность того, что в n испытаниях исход E_1 появится r_1 раз, E_2 − r_2 раз, …, E_1 – r_k раз, где $\sum_{i=1}^{k} r_i=n$, находится по формуле:

$P(r_1, r_2,\ldots, r_k)=\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_{k1}!}\, p_1^{r_1}\, p_2^{r_2}\ldots p_k^{r_k}$, $\sum_{i=1}^{k} p_i=1$, $\sum_{i=1}^{k} r_i=n$ – *формула полиноминального распределения.*

Замечание 10.3. Формула полиноминального распределения обобщает формулу Бернулли на случай более 2 исходов в каждом испытании.

Пример 10.4. В урне 3 шара: белый, красный, синий. Из урны 5 раз наудачу извлекаются шары с возвращением. Найти вероятность того, что белый шар извлечён 3 раза, а красный и синий – по одному разу.

◅ Поскольку $p_1=p_2=p_3=\frac{1}{3}$; $r_1=3$, $r_2=1$, $r_3=1$.

Тогда $P_5(3,1,1)=\frac{5!}{3!1!1!}\cdot(\frac{1}{3})^3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=20\cdot\frac{1}{3^5}=\frac{20}{3^5}=\frac{20}{243}$. ▻

11 Теорема Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

Теорема 11.1. (*Пуассона*) Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А наступает с вероятностью p. Тогда, если число испытаний неограниченно возрастает, а $p\to 0$, причём $n\cdot p=a$ – величина постоянная, то $P_n(k)\approx\frac{a^k}{k!}e^{-a}$.

◅По формуле Бернулли вероятность того, что событие появится ровно k раз в n независимых испытаниях

$P_n(k)= C_n^k p^k q^{n-k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$

Отсюда

$$P_n(k)= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)...(n-1)n}{k!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

По условию $a=n\cdot p \Rightarrow p=\frac{a}{n}$, подставляя, получим:

$$P_n(k)=\frac{(n-k+1)(n-k+2)...(n-1)n}{k!}\left(\frac{a}{n}\right)^k \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k} =$$

$$=\frac{a^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k} =$$

$$=\frac{a^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left[\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-\frac{n}{a}}\right]^{-a}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k)=\frac{a^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-\frac{n}{a}}\right]^{-a}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k}=\frac{a^k}{k!}e^{-a} \text{ [т.к. } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\text{]}. \rhd$$

Замечание 11.2. Теоремой Пуассона удобно пользоваться, когда $p\to 0$, причём $a=n\cdot p\le 10$. Существуют специальные таблицы, в которых приведены значения вероятностей для различных параметров a и k.

Формула Бернулли удобна, когда значение n не очень велико. В противном случае используют приближенные формулы из теорем Муавра-Лапласа.

Теорема 11.3. (*локальная теорема Муавра-Лапласа*) Если вероятность появления события А в каждом отдельном испытании постоянна и отлична от 0 и 1, т.е.$0< p <1$, то вероятность того, что событие A появится ровно k раз в n независимых испытаниях

$P_n(k)\approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ – малая функция Лапласа, $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $q=1-p$.

Имеются специальные таблицы значений функции $\varphi(x)$. Нужно учитывать, что функция $\varphi(x)$ – чётная, т.е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Теорема 11.4. (*интегральная теорема Муавра-Лапласа*) Если вероятность появления события А в каждом отдельном испытании постоянна и отлична от отлична от 0 и 1, т.е. $0< p <1$, то вероятность того, что событие A появится от k_1 до k_2 раз в n независимых испытаниях, определятся выражением:

$P_n(k_1,k_2)\approx \Phi(x_1)-\Phi(x_2)$, где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа, $x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, $q=1-p$.

Функция Лапласа – нечётная, т.е. $\Phi(-x)=-\Phi(x)$. Значения находят по таблице.

Пример 11.5. Пусть вероятность события A в каждом отдельном испытании p=0,8. Найти вероятность того, что событие A появится 75 раз в 100 независимых испытаниях.

◅ По локальной теореме Муавра-Лапласа $x = \dfrac{75 - 100*0{,}8}{\sqrt{100*0{,}8*0{,}2}} = -\dfrac{5}{4} = -1{,}25.$

Значение $\varphi(-1{,}25)=\varphi(1{,}25)=0{,}1826$ находится по таблице.

Тогда вероятность

$P_{100}(75) \approx \dfrac{1}{\sqrt{100*0{,}8*0{,}2}} *0{,}1826 \approx 0{,}04565.$ ▻

Пример 11.6. Вероятность P(A) появления события A в одном испытании равна 0,8. Найти вероятность того, что событие A появится более 69 раз в 100 независимых испытаниях.

◅ n=100, p=0,8, q=0,2, k_1=70, k_1=100.

По интегральной теореме Муавра-Лапласа $x_1 = \dfrac{70 - 100*0{,}8}{\sqrt{100*0{,}8*0{,}2}} = -\dfrac{10}{4} = -1{,}25$,

$x_2 = \dfrac{100 - 100*0{,}8}{\sqrt{100*0{,}8*0{,}2}} = \dfrac{20}{4} = 5$. По таблице $\Phi(-2{,}5) = -\Phi(2{,}5) = -0{,}4938$, $\Phi(5)=0{,}5$,

$P_{100}(70,100) \approx \Phi(5) - \Phi(-2{,}5) = 0{,}5 + 0{,}4938 = 0{,}9938$ ▻

12 Случайные величины

Определение 12.1. *Случайной величиной* X называется функция X(ω), отображающая пространство элементарных исходов Ω во множество действительных чисел $\mathbf{R}$. Т.о. $X(\omega): \Omega \to \mathbf{R}$.

Пример 12.2. Дважды подбрасывается монета. Рассмотрим случайную величину X – число выпадений герба, определённую на пространстве элементарных исходов Ω={(г,г),(г,р),(р,г),(р,р)}. Множество возможных значений случайной величины X-{0,1,2}. Составим таблицу

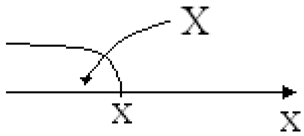
ω	(г,г)	(г,р)	(р,г)	(р,р)
X(ω)	2	1	1	0

Одной из важнейших характеристик случайной величины является её функция распределения.

Определение 12.3. *Функцией распределения случайной величины* X называется функция $F(x)=F_X(x)$ действительной переменной x, определяющая вероятность того, что случайная величина X примет в результате эксперимента значение, меньшее некоторого фиксированного числа x

$F(x)=P\{X< x\}=P\{X\in(-\infty; x)\}$.

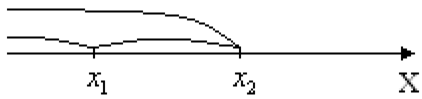
Замечание 12.4. Если рассматривать случайную величину X как случайную точку на оси Ox, то функция распределения F(x) с геометрической точки зрения – это вероятность того, что случайная точка X в результате реализации эксперимента попадёт левее точки x.



<u>Свойства функции распределения</u>

Свойство 12.5. Функция распределения F(x) – неубывающая функция, т.е.для $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется условие F(x) ≤F(x).

◁Поскольку $x_1 < x_2$, то события $\{X < x_2\}=\{X < x_1\}+\{x_1 \le X < x_2\}$, по определению функции распределения F(x_2)=F(x_1)+P$\{x_1 \le X < x_2\}$.



Т.к. P$\{x_1 \le X < x_2\} \ge 0$, то F($x_2$)>F($x_1$). ▷

Свойство 12.6. Для $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ таких, что $x_1 < x_2$ справедливо равенство P$\{x_1 \le X < x_2\}$= F(x_2)–F(x_1).

Замечание 12.7. Если функция распределения F(x) – непрерывная, то свойство 12.6 выполняется и при замене знаков ≤ и < на < и ≤.

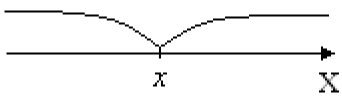
Свойство 12.8. $\lim\limits_{x \to -\infty}$ F(x)=0; $\lim\limits_{x \to +\infty}$ F(x)=1.

◁ F(-∞)=P{X<-∞}=P(Ø)=0, F(+∞)=P{X<+∞}=P(Ω)=1. ▷

Свойство 12.9. Функция распределения F(x) непрерывна слева ($\lim\limits_{x \to x_0 - 0}$ F(x)=F(x_0)).

Свойство 12.10. P{X≥x}=1-F(x).

◁{X<+∞}={X<x}+{X≥x}, по свойству вероятности P{X<+∞}=P{X<x}+P{X≥x};
P(Ω)=1= F(x)+ P{X≥x}, откуда P{X≥x}=1- F(x).▷



13 Дискретные случайные величины

Определение 13.1. Случайная величина X называется *дискретной*, если она принимает конечное либо счётное число значений.

Определение 13.2. *Законом распределения случайной величины X* называется совокупность пар чисел (x_i, p_i), где x_i – возможные значения случайной величины, а p_i – вероятности, с которыми случайная величина принимает эти значения, т.е. p_i= P{X=x_i}, причём $\sum\limits_i p_i$=1.

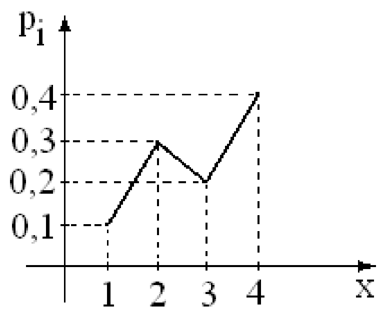
Простейшей формой задания дискретной случайной величины является таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности. Такая таблица называется *рядом распределения* дискретной случайной величины.

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

Ряд распределения можно изобразить графически. В этом случае по оси абсцисс откладывается x_i, по оси ординат – вероятность p_i. Точки с координатами (x_i, p_i) соединяют отрезками и получают ломаную, называемую *многоугольником распределения,* который является одной из форм задания закона распределения дискретной случайной величины.

Пример 13.3. Построить многоугольник распределения случайной величины X с рядом распределения

X	1	2	3	4
P	0,1	0,3	0,2	0,4



Определение 13.4. Говорят, что дискретная случайная величина X имеет *биноминальное распределение* с параметрами (*n,p*) если она может принимать целые неотрицательные значения $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ с вероятностями P(*X*=*x*)=$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

Ряд распределения имеет вид:

X	0	1	…	k	…	n
P	$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$	…	$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	…	p^n

Сумма вероятностей $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1$.

Определение 13.5. Говорят, что дискретная форма случайной величины X имеет *распределение Пуассона* с параметром λ ($\lambda>0$), если она принимает целые значения $k\in\{0,1,2,\ldots\}$ с вероятностями P(X=k)=$\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

Ряд распределения имеет вид

X	0	1	…	k	…
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	…	$\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	…

Так как разложение e^x в ряд Маклорена имеет следующий вид $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}$, тогда сумма вероятностей $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\,e^{\lambda} = 1$.

Обозначим через X число испытаний, которые нужно провести до первого появления события A в независимых испытаниях, если вероятность появления А в каждом из них равна p (0< p <1), а вероятность непоявления $q=1-p$. Возможными значениями X являются натуральные числа.

Определение 13.6. Говорят, что случайная величина X имеет *геометрическое распределение* с параметром p (0< p <1), если она принимает натуральные значения $k\in\mathbf{N}$ с вероятностями P(X=k)= $q^{k-1}p$, где $q=1-p$. Ряд распределения :

X	1	2	3	…	n	…
P	p	qp	q^2p	…	$q^{k-1}p$	…

Сумма вероятностей $\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}p=\frac{p}{1-q}=\frac{p}{p}=1$.

Пример 13.7. Монета брошена 2 раза. Составить ряд распределения случайной величины X−числа выпадений «герба».

◅ $P_2(0)=C_2^0q^2=\frac{1}{4}$; $P_2(1)=C_2^1qp=\frac{1}{2}=0{,}5$; $P_2(2)=C_2^2p=\frac{1}{4}$.

Ряд распределения примет вид:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

. ▻

Пример 13.8. Из орудия стреляют до первого попадания по цели. Вероятность попадания при одном выстреле 0,6. Найти вероятность того,что произойдёт попадание при 3-м выстреле.

◅ Поскольку p=0,6, q=0,4, k=3, тогда P(A)= $q^{k-1}p$ =0,4^2*0,6=0,096.▻

14 Числовые характеристики дискретных случайных величин

Полностью характеризует случайную величину закон распределения, однако часто он бывает неизвестен, поэтому приходится ограничиваться меньшими сведениями. Иногда даже выгоднее пользоваться числами (параметрами), описывающими случайную величину суммарно. Они называются *числовыми характеристиками* случайной величины. К ним относятся: математическое ожидание, дисперсия и др.

Определение 14.1. *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины называют сумму произведений всех её возможных значений на их вероятности. Обозначают математическое ожидание случайной величины X через MX=M(X)=EX.

Если случайная величина X принимает конечное число значений, то МX=$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Если случайная величина X принимает счетное число значений, то МX=$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$,

причём математическое ожидание существует, если ряд сходится абсолютно.

Замечание 14.2. Математическое ожидание − некоторое число, приближённо равное определённому значению случайной величины.

Пример 14.3. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная её ряд распределения

X	3	5	2
P	0,1	0,6	0,3

◅ МX=3*0,1+5*0,6+2*0,3=3,9. ▻

Пример 14.4. Найти математическое ожидание числа появлений события A в одном испытании, если вероятность события A равна p.

◅ Случайная величина X – число появления события A в одном испытании. Она может принимать значения x_1=1 (A наступило) с вероятностью p и x_2=0 с вероятностью $q = 1 - p$, т.е. ряд распределения

X	1	0
P	p	q

МX= 1·p+0·q=p. ▻

Т.е., математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности этого события.

Свойства математического ожидания

Свойство 14.5. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: МС=С.

◅ Будем рассматривать постоянную С как дискретную случайную величину с рядом

C	C
P	1

Отсюда МС=С*1=С. ▻

Замечание 14.6. Произведение постоянной величины С на дискретную случайную величину X Определяется как дискретная случайная величина СX, возможные значения которой равны произведениям постоянной С на возможные значения X, вероятности этих значений СX равны вероятностям соответствующих возможных значений X.

Свойство 14.7. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:
М(СX)=С·МX.

◅ Если случайная величина X имеет ряд распределения

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

Ряд распределения случайной величины

CX	Cx_1	Cx_2	…	Cx_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

$$M(CX)=\sum_{i=1}^{\infty} Cx_i p_i = C\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = C\cdot M(X).$$ ▻

Определение 14.8. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называются *независимыми*, если для $\forall B_i \in \mathbf{R}$, i=1,2,…,n

$P\{X_1 \in B_1,\ X_2 \in B_2, \ldots, X_n \in B_n\} = P\{X_1 \in B_1\}\ P\{X_2 \in B_2\} \ldots P\{X_n \in B_n\}$ (1)

Если в качестве $B_i = (-\infty, x_i)$, i=1,2,…,n, то получим из (1)

$P\{X_1 < x_1,\ X_2 < x_2, \ldots,\ X_n < x_n\} = P\{X_1 < x_1\} P\{X_2 < x_2\} \ldots P\{X_n < x_n\}$, откуда получается другая формула:

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \ldots F_{X_n}(x_n) \quad (2)$$

для совместной функции распределения случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, которую можно также взять в качестве определения независимости случайной величины.

Свойство 14.9. Математическое ожидание произведения 2-х *независимых* случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XУ)=MX\cdot MУ.$$

Свойство 14.10. Математическое ожидание суммы 2-х случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+У)=MX+MУ.$$

Замечание 14.11. Свойства 14.9 и 14.10 можно обобщать на случай нескольких случайных величин.

Пример 14.12. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании 2-х игровых костей.

◅Пусть X –число очков, выпавших на первой кости, $У$– число очков, выпавших на второй кости. Они имеют одинаковые ряды распределения:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогда $MX=MУ=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$. $M(X+У)=2*\frac{7}{2}=7$. ▻

Теорема 14.13. Математическое ожидание числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании: $MX=np$.

◅Пусть X – число появлений события A в n независимых испытаниях. X_i – число появлений события A в i-том испытании, i=1,2,…,n. Тогда $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. По свойствам математического ожидания $MX=\sum_{i=1}^{n} MX_i$. Из примера 14.4 $MX_i=p$, i=1,2,…,n, отсюда $MX=\sum_{i=1}^{n} p=np$. ▻

Определение 14.14. *Дисперсией* случайной величины называется число $DX=M(X-MX)^2$.

Определение 14.15. *Средним квадратическим отклонением* случайной величины X называется число $\sigma_X = \sqrt{DX}$.

Замечание 14.16. Дисперсия является мерой разброса значений случайной величины вокруг её математического ожидания. Она всегда неотрицательна. Для подсчёта дисперсии удобнее пользоваться другой формулой:
$\mathrm{D}X = \mathrm{M}(X - \mathrm{M}X)^2 = \mathrm{M}(X^2 - 2X\cdot\mathrm{M}X + (\mathrm{M}X)^2) = \mathrm{M}(X^2) - 2\mathrm{M}(X\cdot\mathrm{M}X) + \mathrm{M}(\mathrm{M}X)^2 =$
$= \mathrm{M}(X^2) - \mathrm{M}X\cdot \mathrm{M}X + (\mathrm{M}X)^2 = \mathrm{M}(X^2) - (\mathrm{M}X)^2$.

Отсюда $\mathrm{D}X = \mathrm{M}(X^2) - (\mathrm{M}X)^2$.

Пример 14.17. Найти дисперсию случайной величины X, Заданной рядом распределения

X	2	3	5
P	0,1	0,6	0,3

◅ $\mathrm{M}X=2*0{,}1+3*0{,}6+5*0{,}3=3{,}5$; $\mathrm{M}(X^2)= 4*0{,}1+9*0{,}6+25*0{,}3=13{,}3$;
$\mathrm{D}X=13.3-(3{,}5)^2=1{,}05$. ▻

Свойства дисперсии

Свойство 14.18. Дисперсия постоянной величины равна 0:
$\mathrm{D}C=0$

◅ $\mathrm{D}C = \mathrm{M}(C - \mathrm{M}C)^2 = \mathrm{M}(C - C)^2=0$. ▻

Свойство 14.19. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат
$\mathrm{D}(CX) = C^2\, \mathrm{D}X$.

◅ $\mathrm{D}(CX)=\mathrm{M}(C - C\mathrm{M}X)^2=\mathrm{M}(C(X - \mathrm{M}X)^2) = C^2\, \mathrm{M}(X - \mathrm{M}X)^2 = C^2\mathrm{D}X$. ▻

Свойство 14.20. Дисперсия суммы 2-х *независимых* случайных величин равна сумме дисперсий этих величин

$\mathrm{D}(X+Y)=\mathrm{D}X+\mathrm{D}Y$.

◅ $\mathrm{D}(X + Y)=\mathrm{M}((X + Y)^2) - (\mathrm{M}(X + Y))^2= \mathrm{M}(X^2 + 2XY + Y^2) - (\mathrm{M}X + \mathrm{M}Y)^2=$
$=\mathrm{M}(X)^2+2\mathrm{M}X\mathrm{M}Y+\mathrm{M}(Y^2)-(\mathrm{M}(X)^2+2\mathrm{M}X\mathrm{M}Y+\mathrm{M}(Y)^2)= \mathrm{M}(X^2)-(\mathrm{M}X)^2+\mathrm{M}(Y^2)- (\mathrm{M}Y)^2=$
$= \mathrm{D}X+\mathrm{D}Y$. ▻

Следствие 14.21. Дисперсия суммы нескольких *независимых* случайных величин равна сумме их дисперсий.

Теорема 14.22. Дисперсия числа появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в данном испытании.
$\mathrm{D}X = npq$.

◅ X – число появлений события A в n независимых испытаниях, $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$,
где X_i – число появлений A в i-том испытании, взаимно независимые, поскольку исход каждого испытания не зависит от исходов остальных.

$\mathrm{D}X = \sum_{i=1}^{n} DX_i$,

X_i	1	0

P	p	q

Получаем, что МX_i=p и МX_i^2=p, тогда DX_i=М(X_i^2)-(МX_i)^2=p-p^2=p(1-p)=pq.

Следовательно D$X=\sum_{i=1}^{n} pq=npq$.▻

Пример 14.23. Проводятся 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найти дисперсию X - числа появлений события в этих испытаниях.

◅ Поскольку n=10, p=0,6, q=0,4, тогда DX=npq=10*0,6*0,4=2,4. ▻

Определение 14.24. *Начальным моментом порядка k* случайной величины X называют математическое ожидание случайной величины X^k:

ν_k=М(X^k).

ν_1=М(X),ν_2=М(X^2). Отсюда D$X=\nu_2-\nu_1^2$.

Определение 14.25. *Центральным моментом порядка k* случайной величины X называется математическое ожидание случайной величины (X-МX)^k.

μ_k=М[(X-МX)^k].

Таким образом, μ_1= М[X-МX]= МX - МX=0, μ_2= М[(X-МX)^2]= DX. Следовательно $\mu_2=\nu_2-\nu_1^2$.

По определению центрального момента и пользуясь свойствами математического ожидания можно получить формулы для моментов более высоких порядков:

$\mu_3=\nu_3-3\nu_2\nu_1+2\nu_1^3$,

$\mu_4=\nu_4-4\nu_3\nu_1+6\nu_2\nu_1^2-3\nu_1^4$.

Лекция 15 Непрерывные случайные величины

Определение 15.1. Говорят, что случайная величина X *имеет вероятность* или *плотность распределения вероятностей*, если существует функция *p(x)* такая, что функция распределения

$$F(x)=\mathrm{P}\{X<x\}=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt \quad (1).$$

Пример 15.2. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при\ x\le 0, \\ \dfrac{x^2}{1+x^2} & при\ x>0. \end{cases}$$

Найдите плотность распределения.

◅ Плотность распределения *p(x)* и функция распределения $F(x)$ связаны формулой (1), из нее получаем:

$p(x)= F'(x) = \left(\dfrac{x^2}{1+x^2} \right)' = \dfrac{2x(1+x^2) - 2x \cdot x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ при $x > 0$;

$p(x)= F'(x) =0$ при $x \le 0$.

Таким образом, плотность распределения данной случайной величины определяется следующей функцией

$$p(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 0, \\ \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} & при\ x > 0. \end{cases}$$ ▷

Пример 15.3. Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X, плотность вероятности которой определена функцией

$$p(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 0\, и\, x > 2, \\ x & при\, 0 < x \le 1, \\ 2 - x & при\ 1 < x \le 2. \end{cases}$$

◁ Чтобы найти функцию распределения $F(x)$, воспользуемся формулой (1). При $x \le 0$ получаем $F(x)= \int\limits_{-\infty}^{0} 0\, dx =0$.

При $0 < x \le 1$ находим

$$F(x)= \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} p(t)dt + \int\limits_{0}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int\limits_{0}^{x} t\, dt = 0 + \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}.$$

При $1 < x \le 2$ имеем

$$F(x)= \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} p(t)dt + \int\limits_{0}^{1} p(t)dt + \int\limits_{1}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int\limits_{0}^{1} t\, dt + \int\limits_{1}^{x} (2-t)\, dt = 0 + \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 +$$

$$+ \left.(2t - \frac{t^2}{2})\right|_1^x = \frac{1}{2} + (2x - \frac{x^2}{2}) - (2 - \frac{1}{2}) = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1.$$

При $x > 0$ получаем $F(x)= \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{2} p(t)dt + \int\limits_{2}^{x} p(t)dt = F(2) + \int\limits_{2}^{x} 0\, dt =1.$

Таким образом, искомая функция распределения имеет вид

Плотность распределения $p(x)$ и функция распределения $F(x)$ связаны формулой (1), из нее получаем:

$p(x)= F'(x) = \left(\dfrac{x^2}{1+x^2} \right)' = \dfrac{2x(1+x^2) - 2x \cdot x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ при $x > 0$;

$p(x)= F'(x) =0$ при $x \le 0$.

Таким образом, плотность распределения данной случайной величины определяется следующей функцией

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при\ x\le 0\ и\ x>2, \\ x^2/2 & при\ 0<x\le 1, \\ -x^2/2+2x-1 & при\ 1<x\le 2, \\ 1 & при\ x>2. \end{cases}$$ ▻

Определение 15.3. Случайная величина называется *непрерывной*, если она имеет плотность распределения вероятностей.

График функции *p(x)* (плотности распределения) называется *кривой распределения.*

Вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (α,β) равна:

$$P\{\alpha<X<\beta\}=\int_{\alpha}^{\beta}p(t)dt \quad (2).$$

Пример 15.4. Плотность распределения случайной величины X задана функцией

$$p(x)=\begin{cases} 0 & при\ x\le 0, \\ \dfrac{x}{2} & при\ 0<x\le 2, \\ 0 & при\ x>2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала (1,2).

◅ Необходимую вероятность найдем по формуле (2):

$$P\{1<X<2\}=\int_1^2\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{4}\bigg|_1^2=\frac{2^2}{4}-\frac{1^2}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0{,}75.$$ ▻

<u>Свойства плотности распределения</u>

Свойство 15.3. F'(x)=$p(x)$.

Свойство 15.4. Плотность распределения – неотрицательная функция $p(x)>0$.

◅ Т.к. F(x) - неубывающая функция, то F'(x)≥ 0, $p(x)$= F'(x)≥ 0. ▻

График плотности распределения называют *кривой распределения*. Кривая распределения расположена либо над осью О*x*, либо на оси О*x*.

Свойство 15.5. $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1$.

◅ В равенстве (1) вместо x ставим $x=+\infty$, получаем $F(+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1$. ▻

Свойство 15.6. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение из множества B равна интегралу по множеству B от плотности распределения:

$P(X\in B)=\int_B p(t)dt$.

Литература:

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман – М.: Высшая школа, 1977 (2004, 2008). – 480 с.
2. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по ТВ и МС / В.Е. Гмурман – М.: Высшая школа, 1979 (2004, 2008). – 400 с.
3. Мацкевич, И.П. Высшая математика: ТВ и МС / И.П. Мацкевич, Г.П. Свирид – Минск.: Вышэйшая школа, 1993. – 269 с.
4. Еровенко, В.А. Основы высшей математики для филологов: методические замечания и примеры, курс лекций / В.А. Еровенко. – Минск.: БГУ, 2006. – 175 с.
5. Бураковский, В.В. Теория вероятностей и математическая статистика: лабораторный практикум: в 2 ч. Ч. 1 / В.В. Бураковский – Гомель.: ГГУ им. Ф. Скорины, 2002. – 52 с.
6. Свешников, А.А. Сборник задач по теории вероятности, математической статистики и теории случайных функций / А.А. Свешников – М.: Наука, 1965. – 632 с.
7. Кручкович, Г.И. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики / Г.И. Кручкович, Г.М. Мордасова, В. А. Подольский, Б. С. Римский-Корсаков, – М.: Высшая школа, 1970. – 512 с.

Учебное издание

БУРАКОВСКИЙ ВЛАДИМИР ВИКТОРОВИЧ
БОРОДИЧ ТИМУР ВИКТОРОВИЧ

Высшая математика

Тексты лекций

Рекомендованы к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Подписано в печать __.__.__. Формат 60x84 1/16. Бумага писчая № 1 Печать офсетная. Гарнитура Таймс. Усл. П. Л. 4,7. Уч.-изд.л. 3,72. Тираж ___ экз.

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104

Отпечатано на полиграфической технике с оригинала
макета учреждения образования «Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104